数理解析研究所講究録
584巻 1986年 62-90

MEASURE-COMPLETE SPACES

静岡大・教育　太田春外（Haruto Ohta）

位相空間論の研究課題の1つは，位相的性質が種々のoperationsの下でどの程度保存されるかを調べることである。さて位相空間上の抽象的な測度論では，その上の任意の測度が或る意味でうまい性質を持つという条件によって，いくつかの位相空間のクラスが定義される。これらの空間の概念は，それらが位相的性質，即ち，同相写像の下で不変な性質であるにも拘らず，上に述べた様な位相空間論の立場からは組織的な研究がなされていない。そこでこの問題について，今までに何が知られて何が知られていないかを明らかにしたい。

以下，"space"と言えば，完全正則なHausdorff位相空間を意味する。Space X について，

$F(X)$: X の closed sets の全体，

$Z(X)$: X の zero-sets の全体，

$Bo(X)$: X の Borel sets の全体,

$Ba(X)$: X の Baire sets の全体,

とする。X 上の"Borel (Baire) measure"は, $Bo(X)$ ($Ba(X)$) 上で定義された finite, nonnegative, σ-additive measure を意味する。

1. Measures の性質。 必要となる measures の性質について簡単に述べる。詳しくは, Borel measures については [14] を, Baire measures については [14] 又は [35] を参照されたい。まず Borel measures について,

DEFINITIONS 1.1. μ を space X 上の Borel measure とする。任意の $B \in Bo(X)$ に対して,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) ; \text{compact } K \subseteq B\}$$

が成り立つとき, μ は <u>Radon measure</u> であるという。また,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) ; F \subseteq B, F \in F(X)\}$$

が成り立つとき, μ は <u>regular</u> であるという。いま包含関係によって順序付けられた open sets からなる net $\mathcal{U}$ について $U_0 = \cup\{U ; U \in \mathcal{U}\}$ であるとき, $\mathcal{U} \nearrow U_0$ とかく。任意のその様な net $\mathcal{U}$ に対して,

$$\mathcal{U} \nearrow U_0 \Rightarrow \mu(U_0) = \sup\{\mu(U) ; U \in \mathcal{U}\}$$

が成り立つとき, μ は <u>τ-additive</u> であるという。また任意

のその様な net $\mathcal{U}$ に対して、

$$\mathcal{U} \nearrow X \Rightarrow \mu(X) = \sup\{\mu(U) ; U \in \mathcal{U}\}$$

が成り立つとき、μ は weakly τ-additive であるという。

Radon measure は、locally compact space 上の compact support をもつ complex-valued continuous functions 全体からなる normed space の上で定義された linear functional を Riesz の表現定理によって積分表示する際に構成される measure として知られているが、Schwartz [32] によって、一般の space の上で扱われる様になった。Radon measure であることと regularity は、Borel sets の measure を分り易い集合の measure で近似出来ることを示していると考えられる。また (1.1) で定義された 4 つの性質は、共に measures のある種の連続性を表わしていると考えることも出来る。これらの間には、次の関係がある。

$$\begin{array}{lll} \text{Radon} & & \\ \downarrow & & \\ \tau\text{-additive} & \longrightarrow & \text{weakly } \tau\text{-additive} \\ \downarrow & & \\ \text{regular} & & \end{array}$$

Diagram 1.

また、regular, weakly τ-additive measure は τ-additive である。矢印の逆が成立しないことを示す例を挙げよう。

EXAMPLES 1.2. (a) 可算順序数の space ω_1 の Borel set B は，次の (0) 又は (1) のいずれかをみたす。

(0) $^{\exists}$closed unbounded set $F \subseteq \omega_1$ s.t. $F \cap B = \phi$.

(1) $^{\exists}$closed unbounded set $F \subseteq \omega_1$ s.t. $F \subseteq B$.

(0) が成り立つ場合 $\nu(B) = 0$，(1) が成り立つ場合 $\nu(B) = 1$ として定義される measure ν を，ω_1 上の Dieudonné measure という。これは regular であるが weakly τ-additive でない。実際，$U = \{\alpha ; \alpha < \omega_1\}$ とすれば，$U \nearrow \omega_1$ であるが，$\sup\{\nu(\alpha) ; \alpha < \omega_1\} = 0 < 1 = \nu(\omega_1)$。

(b) ν を ω_1 上の Dieudonné measure とせよ。$\omega_1 + 1$ の Borel set B に対して $\mu(B) = \nu(B \cap \omega_1)$ とすることによって定義される measure μ を，ω_1+1 上の Dieudonné measure という。ω_1+1 の compact 性より μ は weakly τ-additive。ところが，$\sup\{\mu(F) ; F \subseteq B,\ F \in \mathcal{F}(\omega_1+1)\} = 0 < 1 = \mu(\omega_1)$ だから，μ は regular でない。

(c) S を単位区間に Sorgenfrey の位相を与えた space とする。S の Borel sets は通常の位相に関する Borel sets に一致する。そこで Lebesgue measure λ を $B_0(S)$ 上で考える。このとき，S が hereditarily Lindelöf であることから λ は τ-additive。ところが S の compact set の濃度は高々可算だから，λ は Radon measure でない。 □

一方，Baire measures については，Radon measure に対応する概念は tight measure と呼ばれる。これは τ-additivity と共に次の様に定義される。

DEFINITIONS 1.3. μ を space X 上の Baire measure とする。X の compact set は必ずしも Baire set ではないので outer measure が必要となる。即ち，$M \subseteq X$ に対して，

$$\mu^*(M) = \inf\{\mu(B) ; M \subseteq B \in Ba(X)\}$$

とする。さて，任意の $B \in Ba(X)$ に対して，

$$\mu(B) = \sup\{\mu^*(K) ; \text{compact } K \subseteq B\}$$

が成り立つとき，μ は tight measure と呼ばれる。任意の cozero-set U_0 と cozero-sets からなる任意の net $\mathcal{U}$ に対して

$$\mathcal{U} \nearrow U_0 \Rightarrow \mu(U_0) = \sup\{\mu(U) ; U \in \mathcal{U}\}$$

が成り立つとき，μ は τ-additive であるという。

Space X 上の Baire measure μ については，任意の $B \in Ba(X)$ に対して，$\mu(B) = \sup\{\mu(Z) ; Z \subseteq B,\ Z \in Z(X)\}$ が成り立つ。この意味で Baire measure は常に regular である。またこのことから weak τ-additivity に対応する概念は，Baire measures では，τ-additivity と一致することが分る。任意の tight measure は τ-additive である。逆が成り立たない例は，(1.2)(c) の Borel measure λ を $Ba(S)$ 上に制限することによって得られる。

2. Measuresの性質によって定義される空間.

DEFINITIONS 2.1. Space X 上の任意の Borel measure が Radon measure であるとき, X は Radon space と呼ばれる。X 上の任意の Borel measure が (weakly) τ-additive であるときは (weakly) Borel measure-complete と呼ばれる。ここでは, 簡単のために, Borel measure-complete Space を HB-space, weakly Borel measure-complete Space を B-space と呼ぶ。また space X 上の任意の regular Borel measure が Radon measure であるとき, X は Borel strongly measure-compact (= Borel SMC) と呼ばれる。X 上の任意の regular Borel measure が τ-additive であるときは Borel measure-compact (= Borel MC) と呼ばれる。

Radon spaces の概念は Schwartz [32], B-spaces, HB-spaces と Borel MC-spaces は Gardner [10] による。HB-space, B-space は, Adamski [1] によっても, それぞれ τ-space, weak τ-space の名前で独立に定義された。Borel SMC-spaces は Okada-Okazaki [29] によって weak Radon space の名前で定義されたが, ここでは "weak Radon" を別の意味で用いる。次に定義する space は products を考える際に役に立つ。

DEFINITION 2.2. Space X 上の任意の Borel

measure μ に対して，$\mu(X) = \sup\{\mu^*(K);\ \text{compact } K \subseteq X\}$ が成り立つとき，X を weak Radon space とよぶ。但し，ここで，$\mu^*(K) = \inf\{\mu(U);\ K \subseteq U,\ U: \text{open}\}$ である。

一方，Baire measures については，次の様な spaces の性質が古くから研究されたが，ここで用いる名前は Moran [27] によって与えられた。

DEFINITIONS 2.3. Space X 上の任意の Baire measure が tight であるとき，X は strongly measure-compact (= SMC) と呼ばれる。また，X 上の任意の Baire measure が τ-additive であるときは measure-compact (= MC) と呼ばれる。MC-spaces は almost Lindelöf spaces, Φ-spaces 又は B-compact spaces と呼ばれることもある。

今までに述べた spaces は互いに次の様に関係する。

$$
\begin{tikzcd}
\text{Radon} \arrow[dd] \arrow[dr] & & & \\
& \text{weak Radon} \arrow[dd] \arrow[dr] & & \text{SMC} \arrow[ll] \arrow[dd] \\
\begin{array}{c}\text{Borel}\\ \text{measure-complete}\\ \| \\ \text{HB}\end{array} \arrow[dr] & & \text{Borel SMC} \arrow[dd] & \\
& \begin{array}{c}\text{weakly Borel}\\ \text{measure-complete}\\ \| \\ \text{B}\end{array} \arrow[dr] & & \text{MC} \arrow[ll] \\
& & \text{Borel MC} &
\end{tikzcd}
$$

Diagram 2.

これらの spaces の詳細については、[12]，[14] 又は [35] を参照せよ。Diagram 2 の矢印の逆について、次の問題は未解決である。

QUESTION 2.4. Borel MC-space で B-space でないものは存在するか。

Gruenhage-Gardner は [16] で CH を仮定すれば (2.4) は Yes であることを証明した。(2.4) と同様に、Borel SMC で weak Radon でない space の例も見付かっていないが、こちらの問題は、weak Radon space の定義が十分確立されたものとは言えないので、(2.4) 程意味はないかも知れない。その他の矢印の逆はすべて成り立たない。(EXAMPLES 2.12 を見よ。)

REMARK 2.5. X 上の任意の Borel measure が regular である様な space X は Borel-regular space と呼ばれる ([29])。組合せとしては、他に任意の weakly τ-additive measure が regular である様な spaces 等も考えられるが、調べた限りでは研究されていない。これらについては触れないことにする。

さて、Diagram 2 は、位相空間論でなじみのある spaces の間の関係の中でどの様な位置を占めているだろうか。これを考える前に、逆の矢印が成立するための条件につい

て少し注意しよう。まず HB-Space は任意の subspace が B-Space である様な space である（[10, Proposition 7.4]）即ち，HB-Space は hereditarily B-Space である。次に，X 上の任意の τ-additive Borel measure が Radon measure であるとき，X は pre-Radon space と呼ばれる（[13]）。X が βX の Borel set であれば，X は pre-Radon space であることが知られている。従って，locally compact spaces や，より一般に，Čech-complete spaces 等は pre-Radon spaces である。詳しくは [13] を見よ。次の関係が成り立つ。

(2.6.1)　Radon = HB + pre-Radon,

(2.6.2)　Borel SMC = Borel MC + pre-Radon,

(2.6.3)　SMC = MC + pre-Radon。

証明は易しい。weak Radon spaces と B-spaces の間にも同様の関係が期待されるが確認していない。最後に Borel MC (Borel SMC) が MC (SMC) となるための必要十分条件については，§7で詳しく述べる。例えば，normal, countably paracompact spaces ではそれぞれ両者は一致する。

結果として，B-spaces と Borel MC-spaces がどの様な位置にあるかを知れば，他の spaces についても知ることが出来る。そこで B-spaces の位相空間として理解し易いと思われる特徴付けを与えよう。

THEOREM 2.7. Space X が B-space であるためには，X 上の任意の Borel measure μ と任意の X の open cover $\mathcal{U}$ に対して，$\mathcal{U}$ の countable subfamily $\mathcal{U}'$ で $\mu(X \setminus \cup\mathcal{U}') = 0$ であるものが存在することが必要十分。

証明は易しい。従って，Lindelöf spaces は B-spaces である。更に一般的な結果を述べるために，[35]に従って，任意の discrete (closed discrete) subset の濃度が real-valued measurable cardinal (= r.v.m.c.) でない様な space を D-space (CD-space) とよぶ。ZFC が無矛盾ならば，ZFC にすべての濃度が r.v.m.c. でないという仮定を付け加えても無矛盾であることが知られている。

THEOREM 2.8 ([14, THEOREM 10.2]).

(1) Weakly θ-refinable D-space は B-space である。

(2) Weakly θ-refinable CD-space は Borel MC-space である。

COROLLARY 2.9. Hereditarily weakly θ-refinable D-space は HB-space である。

また，(2.9) と (2.6.1) より locally compact, hereditarily weakly θ-refinable, D-space は Radon space である。これらが知られている最良の結果である。CD-space であることは Borel MC であるために必要である。他方，

weak θ-refinability は HB-space であるために，必らずしも必要でない。[14, EXAMPLE 10.5] を見よ。"weakly θ-refinable" を "metaLindelöf" に変えられないかという問題については Gardner-Pfeffer による次の定理と問題がある。

THEOREM 2.10 ([11]). 任意の locally compact, hereditarily metaLindelöf, locally c.c.c. D-space は Radon space であるかという問題は ZFC で決定不可能である。実際，MA + ¬CH の下で肯定的であり，CH の下で否定的である。

QUESTION 2.11 ([11]). MA + ¬CH の下で，locally compact, hereditarily metaLindelöf, D-space は Radon space か。

最後に，Diagram 2 に戻って例を挙げよう。

EXAMPLES 2.12. (a) $\omega_1 + 1$ は SMC であるが，(1.2) より HB-space でない。

(b) 2^ω が r.v.m.c. でないと仮定せよ。このとき，Isbell's space $\Psi = N \cup R$ ([15, 5I]) は Radon space であるが，MC でない。

(c) 単位閉区間 [0, 1] に Sorgenfrey の位相を与えた space S は，HB かつ MC であるが，(1.2) より Borel SMC でない。□

3. Subspaces. 前節で定義された spaces の性質が subspaces にどの様に保たれるかについて、知られている結果を下表にまとめる。Space X の subset S は、S を含む任意の open set U に対して、$S \subseteq B \subseteq U$ である $B \in Ba(X)$ が存在するとき、<u>generalized Baire set</u> であるという。

	A. arbitrary	B. Borel	C. open	D. F_σ	E. closed	F. generalized Baire	G. Baire
1. Radon	0	1	1	1	1	0	1
2. HB	1	1	1	1	1	1	1
3. weak Radon	0	0	0	1	1	0	1
4. B	0	0	0	1	1	1	1
5. Borel SMC	0	0	0	1	1	0	1
6. Borel MC	0	0	0	1	1	?	1
7. SMC	0	0	0	?	1	0	1
8. MC	0	0	0	?	1	1	1
9. Borel-regular	1	1	1	1	1	1	1
10. pre-Radon	0	1	1	1	1	0	1

TABLE 1.

1-F は単位閉区間の subspace として Bernstein set ([14, 5.4] を見よ) を考えよ。これは 1-B と共に Schwartz [32, p.118-120] による。

2-A は Gardner [10, THEOREM 5.2]。

3-C は ω_1+1 の subspace ω_1 を考えよ。3-F は 1-F と同じ例。3-D と 3-G は新しい。

4-C は 3-C と同じ例。これは Adamski [1] による。4-D も [1]。4-F は Okada-Okazaki [29]。

5-C は 3-C と同じ [29]。5-D は [29]。5-F は 1-F と同じ。5-G は，6-G，10-G と (2.6.2) の結果である。

6-C は 5-C と同じ。6-D は [29]。6-G は [29, THEOREM 4.3] から導かれる。

7-C は 3-C と同じ。これは Moran [27] による。7-E は Mosiman-Wheeler [28]。7-F は 1-F と同じ。これは Knowles [22] による。7-G は [27]。

8-C は 7-C と同じ。8-E は Kirk [21]。8-F は [29]。

9-A は [29, PROPOSITION 4.8]。

10-F は 1-F と同じ。10-B の証明は簡単。

結果として，次の問題が残る。

QUESTION 3.1. Borel MC-space の generalized Baire subspace は Borel MC か。

QUESTION 3.2. SMC-space の F_σ-subspace は SMC か。

QUESTION 3.3 ([35, Problem 8.11]). MC-space の F_σ-subspace は MC か。

10-D と (2.6.3) より (3.3) の肯定解は (3.2) にも肯定的に答える。

4. Unions. 知られている結果を TABLE 2 にまとめる。Space X の Subspace S は、任意の $B \in Ba(S)$ に対して、$\tilde{B} \cap S = B$ である $\tilde{B} \in Ba(X)$ が存在するとき、X で Baire-embedded であるという。

	A. finite union	B. countable union	C. union with a compact set	D. countable union of Baire-embedded sets
1. Radon	1	1	-	1
2. HB	1	1	-	1
3. weak Radon	1	1	1	1
4. B	1	1	1	1
5. Borel SMC	1	1	1	1
6. Borel MC	1	1	1	1
7. SMC	0	0	1	1
8. MC	0	0	1	1

TABLE 2.

1-B は Schwartz [32] による。compact set は HB とは

限らないので 1-C と 2-C は意味がない。2-B, 4-B, 5-B と 7-D, 8-D は Okada-Okazaki [29], 6-B は Gardner [10] による。8-C は Wheeler [35, THEOREM 8.10]。3-B と 7-C は新しい。7-A と 8-A を示す例を与えよう。

EXAMPLE 4.1. 2つの SMC-spaces の union が必ずしも MC でないことを示す。D を濃度 ω_1 の discrete space, $D^* = D \cup \{\infty\}$ を D の one-point compactification とせよ。

$$X = (D^* \times (\omega + 1)) \setminus \{(\infty, \omega)\}$$

は, σ-compact space $D^* \times \omega$ と discrete space $D \times \{\omega\}$ の union である。ところが, X は MC でない。なぜなら, 任意の $B \in Ba(X)$ に対して, $B \cap (D \times \{\omega\})$ 又は $(D \times \{\omega\}) \setminus B$ のいずれか一方だけが高々可算である。そこで, 前の場合 $\mu(B) = 0$, 後の場合 $\mu(B) = 1$ として X 上の Baire measure μ を定義すれば, μ は τ-additive でない。□

次の様な問題は, 調べた限りでは, 全く研究されていない。

QUESTION 4.2. locally finite union, locally countable union については, 何が言えるか。

5. Products. TABLE 3 は products について知られている結果である。"$\mathfrak{c} \geq m_r$" によって, 連続体の濃度 $\mathfrak{c}$ が

r.v.m.c. であることを意味する。* は "CH 又は $\mathfrak{c} \geq m_r$" の下で，** は "$\mathfrak{c} \geq m_r$" の下で，*** は "MA + ¬CH" の下で 0 又は 1 であることを示す。

	A. finite product	B. product with a compact space	C. countable product	D. $\{0, 1\}^{\omega_1}$	E. N^{ω_1} and R^{ω_1}	F. N^c and R^c
1. Radon	0*	-	0*	0	0	0
2. HB	0*	-	0*	0	0	0
3. weak Radon	1	1	1	1	0***	0
4. B	0**	1	0**	1	1***	0
5. Borel SMC	?	1	?	1	0***	0
6. Borel MC	0**	1	0**	1	1***	0
7. SMC	1	1	1	1	0	0
8. MC	0	1	0	1	1***	0

*: CH or $c \geqq mr$ / **: $c \geqq mr$ / ***: MA + ¬CH

TABLE 3.

1-A について，CH の下での反例は Wage [33]，$\mathfrak{c} \geq m_r$ の場合は Fremlin-Haydon ([14, EXAMPLE 11.25]) による。compact space は HB とは限らないので 1-B と 2-B は意味がない。1-C は 1-A の結果。1-D は $\omega_1 + 1 \hookrightarrow \{0, 1\}^{\omega_1}$ である

ことから。これは Schwartz [32] によって注意された。

2-A について，後で述べる様に，1-A に対する反例は 2-A に対しても反例となる。2-D は 1-D と同じ。

3-C は新しい結果である。compact space は weak Radon だから 3-D は明らか。§7 で示す様に，Borel SMC かつ MC ならば SMC である。従って，3-E は 7-E と 8-E から導かれる。3-F は 6-F の結果である。

4-A は 6-A の結果。4-B は B-space と weak Radon space の積が B-space であることから。この結果は新しい。4-D は 3-D と同じ。4-E は 8-E の結果。4-F は 3-F と同じ。

5-B は次節で述べる様に，Borel SMC が perfect map の preimage に保存されるから。5-E は 3-E と同じ。

6-A は Sorgenfrey lines の積 S × S を考えよ。$\mathfrak{c} \geq m_r$ ならば，S × S は CD-space でない。ゆえに Borel MC でない。(Lutzer [24] によって，S × S は hereditarily weakly θ-refinable であることが証明されている。従って $\mathfrak{c} \geq m_r$ でなければ，(2.9) より S × S は HB-space である。) 6-B は 5-B と同じ。6-E は 8-E の結果。6-F は，Borel MC でない space の例である Haydon's space ([14, 5.7]) が $N^{\mathfrak{c}}$ に closed subspace として埋蔵出来るから。

7-C は Moran [27, THEOREM 4.7]。7-D は 3-D と同じ

。7-Eは Wheeler[35, p.129]を見よ。

8-Aについて，Sorgenfrey line S は MC であるが，Moran[26, COROLLARY 4.5]によって，S × S は MC でない。8-B は Moran[27, THEOREM 5.3]によって MC-space と SMC-space の積が MC であるから。8-E は Fremlin[9, p.84]。8-F は 6-F の結果でもあるが，Moran[26]，Kemperman-Maharam[20]によって最初に証明された。

表から，4-E，6-E と 8-E は ZFC で決定不可能である。それ以外の集合論の仮定については，それらが必要であるかどうかは分っていない。従って，次の問題は未解決である。

QUESTIONS 5.1. 次の (1)-(5) の spaces の性質は finite products 又は countable products に保たれるか。
(1) Radon space，(2) HB-space，(3) B-space，(4) Borel SMC-space，(5) Borel MC-space。

特に (1) については Schwartz による。この問題について次の結果が知られている（[32, p.121-122]）。

THEOREM 5.2. Radon spaces X_1, X_2 について，$X_1 \times X_2$ が Radon space であるためには，任意の compact sets $K_i \subseteq X_i$ に対して，$K_1 \times K_2$ が Radon space であることが必要十分。

従って，(5.1) で (1) についての反例が存在するなら

ば，それは compact spaces で与えられる。結果として，(2.6.1) より (1) の否定解は (2) にも否定的に答える。

(5.1) は否定的であることが予想される。そこで次の問題が起る。

QUESTIONS 5.3. X_1, X_2 又は $X_1 \times X_2$ 上にどの様な条件を加えれば，(5.1) で挙げた (1)-(5) の性質は $X_1 \times X_2$ 上に保たれるか。countable products についてはどうか。

(5.3) の解答の1つの可能性として，Gardner によって証明された次の定理を述べよう。

THEOREM 5.4 ([10, THEOREMS 8.1, 8.2]). M を $w(M)$ が r.v.m.c. でない様な metric space とする。

(1) X が HB-space ならば，$X \times M$ は HB-space.

(2) X が MC-space で $X \times M$ が normal, countably paracompact ならば，$X \times M$ は MC-space。

最後に，uncountable products については，Hechler [18], Koumoullis [23] による詳しい研究がある。

6. Mappings. Space X から space Y の上への或る種の continuous map が与えられたとき，X (Y) が §2 で定義された space ならば，Y (X) も同じ性質を持つかという問題について考える。一般に，Y 上の Borel (Baire)

measure μ の性質を X の性質を用いて調べるためには，μ を X の σ-algebra $\{f^{-1}(B);\ B \in Bo(Y)\}$ で定義された measure と考えて，これを $Bo(X)$ 上に拡張する必要がある。そのため問題は measure の拡張の理論と密接に関係する。（open）perfect image について知られている肯定的な結果はすべてこの様な拡張定理の系として得られたものである。TABLE 4 で，A, B, C は X の性質が Y に保たれるか，D は逆に Y の性質が X に保たれるかどうかを示している。

	A. closed image	B. perfect image	C. open perfect image	D. perfect pre-image
1. Radon	?	?	?	-
2. HB	?	?	?	-
3. weak Radon	?	?	?	1
4. B	?	?	?	1
5. Borel SMC	?	?	?	1
6. Borel MC	?	?	?	1
7. SMC	0	0	1	1
8. MC	0	0	1	1

TABLE 4.

compact space は必ずしも HB でないから 1−D と 2−D は意味がない。各 $f^{-1}(y)$ が Radon（HB）であるという仮定を付け加えても，TABLE 3，1−A（2−A）から分る様に，CH 又は $c \geq mr$ の仮定の下では，open perfect preimage の場合さえ答は否定的である。

3−c は，一般に compact space との積と closed subspace について保存される性質は perfect preimage についても保存されることから。4−D ～ 8−D も同じ理由で成り立つが，4−D，6−D，8−D については，[3，COROLLARIES 4.13，4.6，4.3] で，5−D，7−D については [5，THEOREM 4.5] でより一般的な写像の下で証明された。

7−c は [5，THEOREM 4.3] から導かれる。8−c は [4，COROLLARY 2.9]。7−B と 8−B を示す例を与える。

<u>EXAMPLE</u> 6.1. SMC-space の perfect image が必ずしも MC でないことを示す。X を (4.1) の space X とせよ。このとき，Kato [19，THEOREM I] の proof より，X は 2 つの Baire-embedded MC-spaces の union として表わされる space Y の perfect image となる。TABLE 2，8−D より，Y は MC。また，Y は locally compact space X の perfect preimage として locally compact だから，(2.6.3) より Y は SMC である。ところが，(4.1) で示した様に，X は MC でない。□

次の問題は未解決である。

QUESTIONS 6.2. f を space X から space Y の上への closed (又は perfect, 又は open perfect) map とする。X が (1)−(6) の space ならば，Y も同じ space か。

(1) Radon space, (2) HB-space, (3) weak Radon space, (4) B-space, (5) Borel SMC-space, (6) Borel MC-space。

Y に条件を加えれば，(Borel) SMC, MC-space の perfect image については，Bachman, Sultan, Szeto 等によって次の様な肯定的な結果が知られている。

THEOREM 6.3 ([5, THEOREM 4.3], [4, THEOREM 2.7]). f を space X から countably metacompact space Y の上への perfect map とする。このとき，X が Borel SMC (Borel MC) ならば，Y も同じである。

(私の予想では，Y の countable metacompactness は不要である。) Space Y は，$\bigcap_{n\in\omega} F_n = \phi$ である任意の closed sets からなる decreasing sequence (F_n) に対して，$F_n \subseteq U_n$ かつ $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \phi$ である cozero-sets U_n が存在するとき，cozero-dominated であるという。

THEOREM 6.4 ([5, THEOREM 4.3], [4, COROLLARY 2.8]). f を space X から cozero-dominated な space Y の上への perfect map とする。このとき，X が SMC (MC) な

らば，Y も SMC（MC）である。

<u>QUESTION</u> 6.5. SMC（MC）-space の perfect map による image は，Borel SMC（MC）-space か。

<u>QUESTION</u> 6.6. SMC（MC）-space の perfect image となる space を特徴付けよ。

r.v.m.c. の存在を考えなければ，(2.8) より weakly θ-refinable spaces は B-spaces の重要なクラスである。次の問題は Burke [7, p.20, TABLE II] による。

<u>QUESTION</u> 6.7. Weak θ-refinability は closed（又は perfect）image について保存されるか。

7. MC v.s. Borel MC. Borel MC-space がいつ MC であるかという問題について少し注意する。

DEFINITION 7.1（Wheeler [34]）. Space X 上の任意の Baire measure が regular Borel measure に拡張出来るとき，X は <u>Mařík space</u> と呼ばれる。

詳しくは [35] を見よ。次の関係が成り立つ。

(7.2.1) MC = Borel MC + Mařík,

(7.2.2) SMC = Borel SMC + Mařík。

証明は易しい。ではどの様な space が Mařík space だろうか。cozero-dominated の定義で，cozero-set を Baire set で

置きかえて得られる概念を <u>Baire-dominated</u> という。次の関係が知られている。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{1) normal and countably paracompact} \arrow[dr] & & \text{2) countably compact} \arrow[dl] \\
& \text{3) cozero-dominated} \arrow[d] & \\
& \text{4) Baire-dominated} \arrow[dr] & \text{5) MC} \arrow[d] \\
& & \text{6) Mařík}
\end{tikzcd}$$

Diagram 3.

(1) → (6) は Mařík [25] による古典的な結果である。(3) → (6) は Bachman-Sultan [4], (4) → (6) は Adamski [2], (5) → (6) は Knowles [22] による。Wheeler [35] に "MC-space は cozero-dominated か" という問題がある。Michael line と無理数の積 $M \times P$ は, $\mathfrak{c}$ が r.v.m.c. でなければ ($\mathfrak{c} < m_r$ と表わす), MC であることが Moran [27] によって知られているが, 最近, 玉野研一氏によって次の (7.3) が証明された。

<u>FACT</u> 7.3. $M \times P$ は Baire-dominated でない。

$\mathfrak{c} < m_r$ より強い MA + ¬CH の下では, 他の例がある。TABLE 3, 7-E より, このとき N^{ω_1} は MC である。ところが

<u>FACT</u> 7.4. N^{ω_1} は Baire-dominated でない。

$\mathfrak{c} < m_r$ を仮定しない例が望まれるが, この問題に関し

て，もし paracompact でない MC-space が存在すれば，cozero-dominated でない MC-space が存在することが分った。そして実際その様な space は存在する。例えば，(6.1) の space Y を考えよ。これは Wheeler [35] のもう1つの問題 "paracompact でない locally compact MC-space は存在するか" にも肯定的に答える。

8. あとがき。 HB，B，Borel MC と MC-spaces の定義で measures をすべて {0, 1}-measures に置きかえて得られる概念は，それぞれ対応して次の様によばれる。

HB-space → Borel-complete space,

B-space → weakly Borel-complete space,

Borel MC-space → closed complete space,

MC-space → realcompact space。

これらは measure theory では特殊であるが，位相空間論ではむしろ良く研究されている概念である。Borel-complete spaces については [17]，weakly Borel-complete spaces については [30]，closed complete spaces については [6]，[8]，[31] を参照せよ。realcompact spaces については良く知られている。例えば，[15] を見よ。右側の spaces の性質から左側の spaces の性質が，ある程度，推測出来る場

合がある。(もちろん，全くパラレルではない。例えば，realcompact spacesの積はrealcompactであるが，MC-spacesについては成り立たない，TABLE 3，8-A。)

また，右側のspacesについては，すべてフィルターを用いた位相的な(即ち，measuresを用いない，とは言ってもフィルターと{0，1}-measuresは同じことだけれども)特徴付けを与えることが出来る。これに対して，左側のspacesの位相的な特徴付けを見出す問題は未解決である。特に，MC-spacesについては[35，Problem 8.13]である。いずれの場合も簡単な答は予想されない。

最後に参考文献について，Borel measuresについてはGardner[12]，Gardner-Pfeffer[14]に，Baire measuresについてはWheeler[35]によく整理して述べられている。

参考文献

1. W. Adamski, τ-smooth Borel measures on topological spaces, Math. Nachr. 78 (1977), 97-107.
2. W. Adamski, Extensions of tight set functions with applications in topological measure theory, Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), 353-368.
3. G. Bachman and A. Sultan, Measure theoretic techniques in topology and mappings of replete and measure replete spaces, Bull. Austral. Math. Soc. 18 (1978), 267-285.

4. G. Buchman and A. Sultan, On regular extensions of measures, Pacific J. Math. 86 (1980), 389-395.
5. G. Bachman and M. Szeto, On strongly measure replete lattices and the general Wallman remainder, Fund. Math. 122 (1984), 199-217.
6. R. L. Blair, Closed completeness in spaces with weak covering properties, in Set-Theoretic Topology, ed. G. M. Reed, Academic Press, New York (1977), 17-45.
7. D. K. Burke, Closed mappings, in Surveys in General Topology, ed. G. M. Reed, Academic Press, New York (1980), 1-32.
8. N. Dykes, Generalizations of realcompact spaces, Pacific J. Math. 33 (1970), 571-581.
9. D. H. Fremlin, Uncountable powers of R can be almost Lindelöf, Manus. Math. 22 (1977), 77-85.
10. R. J. Gardner, The regularity of Borel measures and Borel measure compactness, Proc. London Math. Soc. (3) 30 (1975), 95-113.
11. R. J. Gardner and W. F. Pfeffer, Some undecidability results concerning Radon measures, Trans. Amer. Math. Soc. 259 (1980), 65-74.
12. R. J. Gardner, The regularity of Borel measures, Lecture Notes in Math. 945 (1981), 42-100.
13. R. J. Gardner and W. F. Pfeffer, Conditions that imply a space is Radon, Lecture Notes in Math. 1089 (1983), 11-22.
14. R. J. Gardner and W. F. Pfeffer, Borel measures, in Handbook of Set-Theoretic Topology, ed. K. Kunen and J. E. Vaughan, North Holland, Amsterdam (1984), 961-1043.
15. L. Gillman and M. Jerison, Rings of continuous functions, Van Nostrand, New York (1960).
16. G. Gruenhage and R. J. Gardner, Completeness and weak covering properties, and measure-compactness, J. London Math. Soc. 18 (1978), 316-324.
17. A. W. Hager, G. D. Reynolds and M. D. Rice, Borel-complete topological spaces, Fund. Math. 75 (1972), 135-143.

18. S. Hechler, On $N^{\aleph_1}$ and the almost Lindelöf property, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 353-355.
19. A. Kato, Union of realcompact spaces and Lindelöf spaces, Canad. J. Math. 31 (1979), 1247-1268.
20. J. Kemperman and D. Maharam, R^c is not almost Lindelöf, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 772-773.
21. R. B. Kirk, Measures in topological spaces and B-compactness, Indag. Math. 31 (1969), 172-183.
22. J. Knowles, Measures on topological spaces, Proc. London Math. Soc. 17 (1967), 139-156.
23. G. Koumoullis, On the almost Lindelöf property in products of separable metric spaces, Comp. Math. 48 (1983), 89-100.
24. D. J. Lutzer, Another property of the Sorgenfrey line, Comp. Math. 24 (1972), 359-363.
25. J. Mařík, The Baire and Borel measure, Czech. Math. J. 7 (1957), 248-253.
26. W. Moran, The additivity of measures on completely regular spaces, J. London Math. Soc. 43 (1968), 633-639.
27. W. Moran, Measures and mappings on topological spaces, Proc. London Math. Soc. 19 (1969), 493-508.
28. S. Mosiman and W. F. Wheeler, The strict topology in a completely regular setting: relations to topological measure theory, Canad. J. Math. 24 (1972), 873-890.
29. S. Okada and Y. Okazaki, On measure-compactness, and Borel measure-compactness, Osaka J. Math. 15 (1978), 183-191.
30. M. D. Rice and G. D. Reynolds, Weakly Borel-complete topological spaces, Fund. Math. 105 (1980), 179-185.
31. M. Sakai, On WB-complete spaces and products of a-realcompact spaces, Thesis for Master's Degree, (1983), Univ. of Tsukuba.
32. L. Schwartz, Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, Oxford Univ. Press, London (1973).
33. M. L. Wage, Products of Radon spaces, Russian Math. Surveys, 35 (1980), 185-187.

34. R. F. Wheeler, Extensions of a σ-additive measure to the projective cover, Lecture Notes in Math. 794 (1979), 81-104.

35. R. F. Wheeler, A survey of Baire measures and strict topologies, Expo. Math. 2 (1983), 97-190.